14 ЛЕКЦИЯ_ **Айнымалыларды ажырату тәсілі**

Айнымалыларды ажырату әдісі теориялық механикада теңдеулерді шешудің негізгі әдістерінің бірі болып табылады. Бұл әдіс физикалық жүйелердің қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табу үшін қолданылады. Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық интегралын табу үшін көп жағдайларда *айнымалыларды ажырату тәсілі* қолданылады. Тұйық механикалық жүйе үшін механикалық энергия сақталатыны белгілі жағдай

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H = E = \text{const}\,, \tag{31.1}$$

$$\partial S = -E\partial t\,,$$

осыдан

$$S = -Et + S(q) + S_0, \tag{31.2}$$

немесе

$$S(r,\phi,t) = -Et + S(r,\phi) + S_0. \tag{31.3}$$

$S_0 = 0$ деп алуға болады. Сонда $S(r,\phi)$ - қалай табуға болады?

(1)–ге өткен параграфтан белгілі $-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\alpha}{r}$ қойып Гамильтон-Якоби теңдеуінің стационар, яғни уақытқа тәуелсіз түрін аламыз

$$-E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{\alpha}{r}. \tag{31.4}$$

Сонымен

$$S = S(r,\phi). \tag{31.5}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) = 0. \tag{31.6}$$

Яғни стандартты түрдегі полярлық жүйедегі Гамильтон-Якоби теңдеуін айнымалыларды ажырату тәсілімен шығарамыз.

$$S(r,\phi) = S(r) + S(\phi), \tag{31.7}$$

немесе

$$S(r,\phi) = R(r) + \Phi(\phi), \tag{31.8}$$

(31.8) –ді (31.6) –ға қойып

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)^2+\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)=0. \qquad (31.9)$$

R және Φ айнымалылары бойынша ажыратып жазатын болсақ

$$r^2\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+2mr^2\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)=-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)^2. \qquad (31.10)$$

$f(r)=G(\phi)$ тең болуы үшін $f(r)=\mathrm{const}$; $G(\phi)=\mathrm{const}$ болуы керек. Сондықтан осы айнымалыларға байланысты екі теңдеу жазамыз

$$1.\ \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}=\beta, \qquad (31.11)$$

мұндағы β– кез келген тұрақты.

$$2.\ \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}=0. \qquad (31.12)$$

(31.11) шешімі:

$$\Phi=\beta\phi+\mathrm{const}, \qquad (31.13)$$

(31.12) шешетін болсақ:

$$\frac{dR}{dr}=\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}}. \qquad (31.14)$$

Егер функция тек бір ғана айнымалыға тәуелді болса, дербес дифференциал толық дифференциалға айналады немесе толық дифференциал дербес дифференциалмен сәйкес болады:

$$R=\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}}dr, \qquad (31.15)$$

(31.3)-ті жазатын болсақ

$$S(r,\phi,t)=-Et+\beta\phi+\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}}dr+S_0. \qquad (31.16)$$

Яғни Гамильтон-Якоби теңдеуінің толық шешімі осылай болады. Кеплер есебі жазық есеп болғандықтан, ол екі тәуелсіз координаттар r және ϕ арқылы өрнектеледі. Сондықтан бұл шешімде екі тәуелсіз айнымалылар (E, β) және S_0- аддитивті тұрақтысы бар.

Енді Лагранж түріндегі теңдеулердің шешімін табу үшін Якоби теоремасын қолданамыз:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \gamma. \qquad (31.17)$$

Осыдан ары қарай

$$-t + \int \frac{2mdr}{2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}}} = \gamma, \qquad (31.18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \delta. \qquad (31.19)$$

Сол сияқты

$$\phi - \int \frac{\frac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\beta}{r^2}}} = \delta. \qquad (31.20)$$

Айнымалыларды бөлу әдісі теориялық механикада теңдеулерді шешудің қуатты құралы болып табылады. Ол бастапқы теңдеуді әрқайсысын дербес шешуге болатын бірнеше қарапайым теңдеулерге бөлуге мүмкіндік береді.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Теориялық механикада айнымалыларды ажырату әдісі қандай?
2. Айнымалыларды ажырату әдісінің негізінде қандай математикалық конструкция жатыр?
3. Айнымалыларды ажырату әдісін қолданғанда қандай жорамалдар жасалады?
4. Айнымалыларды ажырату әдісін қолданғанда бастапқы теңдеу бірнеше теңдеулерге қалай бөлінеді?
5. Әрбір айнымалы үшін алынған теңдеулер қалай шешіледі?
6. Бастапқы теңдеудің жалпы шешімін алу үшін әрбір теңдеудің алынған шешімдерімен не істеу керек?
7. Айнымалыларды ажырату әдісі арқылы теориялық механикадағы есептердің қандай мысалдарын шығаруға болады?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.
2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.
3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5